Olympiadeklasse

5

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630511

Anton, Bea, Clemens und Darius haben jeweils ein Haustier. In der Deutschstunde sollen sie ihre Haustiere beschreiben. Es wird von einem Hamster, von einem Wellensittich, von einer Schildkröte und sogar von einer Schlange berichtet. Jedes der Kinder hat eins dieser Tiere zu Hause.

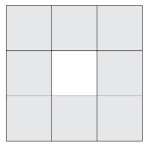
(1) Antons Haustier hat vier Beine.
(2) Clemens' Haustier hat keine Federn, sondern ein Fell.
(3) Beas Haustier kann nicht fliegen.

Ermittle, wer welches Haustier besitzt.

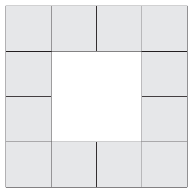
630512

Dana legt aus vielen gleichgroßen Papierquadraten größere Figuren, bei denen immer ganze Quadratseiten aneinander liegen, und sie klebt jeweils zwei nebeneinanderliegende Papierquadrate mit einem kleinen Klebestreifen zusammen.

a) Dana beginnt mit acht Quadraten und will sie zu einem 3×3-Quadrat zusammenfügen, bei dem das mittlere kleine Quadrat fehlt (siehe Abbildung).
Wie viele kleine Klebestreifen braucht sie?



b) Nun möchte Dana aus den kleinen Quadraten ein 4×4-Quadrat zusammenfügen, bei dem wiederum die kleinen Quadrate an den Seiten des großen Quadrats angeordnet sind (siehe Abbildung).
Wie viele kleine Klebestreifen braucht sie hier?



c) Nun fragt sich Dana, wie es weitergehen wird:
Wie viele kleine Klebestreifen werden benötigt, wenn man entsprechend ein 10×10-Quadrat zusammenfügen will? Beantworte Danas Frage.

d) Dana denkt weiter: „Bei dem 4×4-Quadrat habe ich zwölf kleine Quadrate verwendet. Was passiert, wenn ich diese 12 Quadrate anders anordne? Die Lücke in der Mitte muss ja nicht sein.
Wie viele Klebestreifen brauche ich mindestens?
Wie viele Klebestreifen brauche ich höchstens?“
Beantworte Danas Fragen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630513

Die Kinder einer 5. Klasse lernen ein Gedicht auswendig, das aus vier Strophen besteht.

In kleinen Gruppen tragen sie das Gedicht in der richtigen Reihenfolge der Strophen vor.

a) Die vier Kinder Anne, Britta, Chris und Daniel sollen jeweils eine Strophe aufsagen. Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die vier Kinder zu verteilen.

b) Jetzt sollen Emma und Felix je zwei Strophen vortragen. Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die beiden Kinder zu verteilen.

c) Nun sind Gabriel, Hanna und Isabel beim Vortrag. Eines der drei Kinder soll dabei zwei Strophen hintereinander aufsagen, die anderen beiden jeweils eine Strophe. Ermittle wieder die Anzahl der Möglichkeiten.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Namen der Kinder durch den Anfangsbuchstaben abzukürzen.

630514

Jan spielt mit Zahlen. Alle Zahlen, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, nennt er JANZAHLEN.

a) Jan wählt die größte zweistellige JANZAHL, verdoppelt sie zuerst und dann verfünffacht er das erhaltene Ergebnis. Welche Zahl erhält er nun?

b) Ermittle die kleinste fünfstellige JANZAHL.

c) Jan subtrahiert von der größten dreistelligen JANZAHL die kleinste dreistellige JANZAHL. Welche Zahl erhält er nun?

d) Untersuche, ob mehr als die Hälfte der Zahlen von 100 bis 125 JANZAHLEN sind.

Olympiadeklasse **6**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

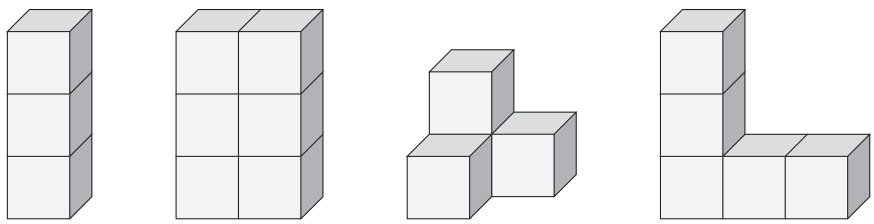
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630611

Meike hat viele gleichgroße Würfel. Alle diese Würfel sind oben und unten blau, links und rechts rot und vorne und hinten gelb. Meike baut daraus Körper auf einer Glasplatte, so dass sie sie auch von unten sehen kann. Dabei dreht sie keinen der verwendeten Würfel.

Die Körper werden von allen Seiten, also von vorn und von hinten, von links und von rechts, von oben und von unten betrachtet.

Zunächst erzeugt Meike die vier abgebildeten Körper (den Stab, das Paket, die Treppe und das L):



a) Gib für die vier abgebildeten Körper an, wie viele kleine blaue, rote und gelbe Quadratflächen jeweils von außen sichtbar sind.

b) Zeichne einen Körper, bei dem zwei gelbe Quadratflächen mehr als blaue und zwei blaue Quadratflächen mehr als rote von außen sichtbar sind.

c) Ermittle die kleinste Anzahl von Würfeln, die man braucht, um einen Körper gemäß b) zu bauen.

d) Lässt sich auch ein Körper bauen, bei dem nur eine blaue Quadratfläche mehr als rote Quadratflächen von außen zu sehen ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630612

Tina hat eine Spielzeug-Uhr, die nur einen Stundenzeiger besitzt. Sie dreht ihn jeweils nur um die gleiche Stundenanzahl weiter, das nennen wir Drehweite. Mit der Drehweite 5 kommt Tina zum Beispiel von 12 Uhr auf 5 Uhr, dann von 5 Uhr auf 10 Uhr usw.

Zunächst startet der Zeiger genau auf 12 Uhr. Tina fragt sich, bei welchen Drehweiten der Zeiger nach weniger als zwölf Drehungen wieder auf 12 Uhr stehen wird.

a) Untersuche, bei welchen der Drehweiten von 1 bis 6 dies der Fall ist.
b) Finde eine Drehweite im Bereich von 7 bis 11, für die das auch der Fall ist.

Nun startet Tina bei 1 Uhr.

c) Für welche Drehweiten von 1 bis 7 bleibt der Zeiger irgendwann bei 12 Uhr stehen?

630613

Die Kinder Anna, Bea, Carolin und Dana stellen sich in alphabetischer Reihenfolge ihrer Vornamen auf.

Dann sollen sie untereinander so Plätze tauschen, dass sie nach ihrer Körpergröße sortiert stehen, beginnend mit dem kleinsten Kind. Es zeigt sich, dass dafür nur zwei Kinder ihre Plätze tauschen müssen.

Als nächstes sollen die Kinder ihre Plätze tauschen, so dass sie nach ihrem Alter sortiert stehen, beginnend mit dem jüngsten Kind. Wieder müssen nur genau zwei Kinder ihren Platz tauschen, damit die Reihenfolge stimmt. Carolin ist übrigens das älteste Kind.

Nach den beiden Umsortierungen ist nur Bea am selben Platz wie zu Beginn.

a) Sortiere die Kinder nach ihrem Alter und zeige, dass nur diese Reihenfolge möglich ist.
b) Zeige, dass aus den Angaben **nicht** eindeutig ermittelt werden kann, welches Kind das größte ist.

630614

Franz und Xaver haben sich ein Zahlenspiel ausgedacht, das nach den folgenden Regeln funktioniert:

Arbeite die Schritte 1 bis 4 nacheinander ab. Wenn ein Schritt nicht ausführbar ist, gehe zum nächsten Schritt.

(1) Wähle dir eine natürliche Zahl.
(2) Wenn die Zahl gerade ist, tue Folgendes:
    Teile sie durch zwei.
    Wenn du bei 1 angekommen bist, höre auf, sonst:
    Gehe mit dem Ergebnis wieder zu Schritt 2.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(3) Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist, tue Folgendes:
Teile sie durch 3.
Wenn du bei 1 angekommen bist, höre auf, sonst:
Gehe mit dem Ergebnis wieder zu Schritt 2.

(4) Addiere zu deiner Zahl 5 dazu.
Gehe mit der neuen Zahl wieder zu Schritt 2.

Franz und Xaver spielen dieses Spiel mit etlichen Anfangszahlen.

„Komisch“, sagt Xaver, „ich glaube, die Reihen enden immer bei der 1.“

„Da bin ich mir nicht sicher“, antwortet Franz.

a) Führe dieses Spiel mit den Anfangszahlen von 9 bis 20 durch.
b) Offensichtlich kommst du bei manchen Startzahlen nie zur 1.
Äußere eine Vermutung, welche Eigenschaft diese Zahlen haben.

Olympiadeklasse 7

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630711

Von einem Arzt, einem Biologen, einem Chemiker und einem Dachdecker ist bekannt, dass jeder genau einen der Namen Ehlers, Fink, Gröger und Helbig führt und jeder in genau einer der Städte Ingolstadt, Jena, Köln und Leipzig wohnt. Sie treffen sich bei einer Ausstellung. Weiter ist zu ihnen bekannt:

(1) Der Arzt wohnt in Köln.
(2) Herr Ehlers ist weder Chemiker noch Arzt.
(3) Herr Helbig und Herr Gröger lernten sich über den Chemiker kennen.
(4) Der Dachdecker wohnt in Jena und ist älter als der Herr aus Leipzig.
(5) Herr Helbig, der in Jena wohnt, korrespondiert mit Herrn Fink per E-Mail.
(6) Der Chemiker und der Herr aus Ingolstadt übernachten in verschiedenen Hotels.

Ermittle, welche Person welchen Beruf hat und in welcher Stadt die jeweilige Person wohnt.

630712

Eine Umkehrprimzahl ist eine Primzahl, deren Ziffern bei Aufschreiben in umgekehrter Reihenfolge wieder eine Primzahl ergeben.

Beispiele: Die Zahl 13 ist eine Umkehrprimzahl, da 13 und 31 Primzahlen sind. Die Zahl 157 ist eine Umkehrprimzahl, da 157 und 751 Primzahlen sind. Die Zahl 23 ist keine Umkehrprimzahl, da 32 keine Primzahl ist.

a) Gib alle Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 an.
b) Gib alle Umkehrprimzahlen kleiner als 102 an, die jeweils die Summe von genau drei paarweise verschiedenen Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 sind. Gib zu diesen Zahlen jeweils eine solche Summendarstellung an.
c) Begründe, dass es nicht möglich ist, aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 4 so auszuwählen, dass deren Summe eine Umkehrprimzahl ist.
d) Untersuche, ob man aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 5 paarweise verschiedene so auswählen kann, dass deren Summe eine zweistellige Umkehrprimzahl ist.

Hinweis: Paarweise verschieden heißen Zahlen, wenn keine zwei von ihnen gleich sind. So sind die drei Zahlen 1, 2 und 3 paarweise verschieden, die drei Zahlen 1, 2 und 2 aber nicht.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630713

Ben und Leon spielen ein Spiel mit Streichhölzern. Dazu entnehmen sie mehreren nichtleeren Streichholzschachteln alle Streichhölzer, zählen sie und legen sie auf einen Teller. Abwechselnd ziehen sie nun, wobei ein Zug aus dem Entnehmen von mindestens einem Streichholz, aber nicht mehr als der Hälfte der Streichhölzer vom Teller besteht, es sei denn, es liegt nur noch genau ein Streichholz auf dem Teller, dann darf dieses entnommen werden. Wer als Letzter ziehen kann, gewinnt.

a) Untersuche, ob das Spiel immer endet und es dabei immer einen Gewinner gibt.

b) Auf dem Teller liegen genau 120 Streichhölzer. Ben darf beginnen. Ben überlegt sich folgende Strategie:

   1. Bei meinem ersten Zug nehme ich genau 25 Streichhölzer weg.
   2. Wenn mehr als ein Streichholz auf dem Teller liegt und es nicht mein erster Zug ist, dann nehme ich genau so viele Streichhölzer weg, dass die Anzahl der auf dem Teller verbleibenden Streichhölzer genau die Hälfte der um 1 verringerten Anzahl an Streichhölzern ist, die nach meinem letzten Zug auf dem Teller lagen.
   3. Wenn genau ein Streichholz auf dem Teller liegt, dann entnehme ich dieses.

   Zeige, dass jeder von Bens Schritten regelkonform ist und dass Ben mit dieser Strategie bei allen regelkonformen Zügen von Leon immer gewinnt.

c) Untersuche, ob Ben seine Strategie so anpassen kann, dass er auch bei anderen Anzahlen von Streichhölzern in den vollen Streichholzschachteln immer gewinnt, wenn er beginnt.

Hinweis: Die in der Teilaufgabe b) beschriebene Strategie reagiert auf die Züge von Leon und lässt Ben bei allen regelkonformen Zügen von Leon gewinnen, wie zu zeigen ist. Eine solche Strategie nennt man *Gewinnstrategie*.

630714

Die Lage von vier Geraden in einer Ebene, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, kann durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte unterschieden werden.

a) Gib die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten an, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige eine Zeichnung mit dieser Anzahl an Schnittpunkten an und begründe, warum mehr Schnittpunkte nicht möglich sind.

b) Finde alle weiteren möglichen Anzahlen von Schnittpunkten, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige für jede dieser Anzahlen eine entsprechende Zeichnung an. Begründe, warum alle anderen Anzahlen nicht möglich sind.

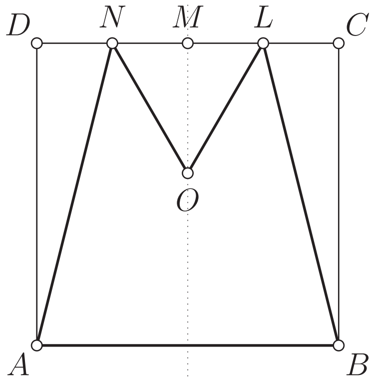
Olympiadeklasse 8

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630811

Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 4 cm. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$, der Punkt L ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ und der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DM}$, siehe die nebenstehende Abbildung.



a) Der Punkt O liege so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $9\,\text{cm}^2$ hat.

   Berechne die Länge der Strecke $\overline{MO}$.

b) Untersuche, ob der Punkt O auch so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$ liegen kann, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $7\,\text{cm}^2$ hat.

630812

Linda hat sich eine natürliche Zahl gedacht und anschließend in der Zifferndarstellung links eine 5 und rechts eine 8 angefügt. Dadurch hat sich die von Linda gedachte Zahl um 518 215 erhöht.

Finde die von Linda gedachte Zahl und begründe, warum sie eindeutig bestimmt ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630813

Die beiden Tabellen sollen so mit Kreuzen $\times$ ausgefüllt werden, dass sie dann die folgenden Eigenschaften haben:

(1) In jeder Spalte und jeder Zeile stehen genau drei Kreuze.
(2) In keinem Feld mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer steht ein Kreuz.
(3) In einem Feld steht genau dann ein Kreuz, wenn auch im Feld mit vertauschter Zeilen- und Spaltennummer ein Kreuz steht.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Tabelle A 630813 a

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Tabelle A 630813 b

Gib jeweils eine so ausgefüllte Tabelle an oder begründe, warum sie nicht so ausgefüllt werden kann.

630814

Bestimme die Anzahl aller im Dezimalsystem sechsstelligen Zahlen, die durch 9 teilbar sind und die Ziffern 2, 0, 2, 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend enthalten.

Olympiadeklassen **9–10**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

631011

a) Für die Zahl a gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl b

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111\,.$$

Berechnen Sie die Quersummen von a und b.

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl s betrachten wir nun die s-stellige natürliche Zahl k, deren Zifferndarstellung aus s Einsen besteht, also $k = \underbrace{1...1}_{s-\text{mal}}$, sowie die ebenfalls s-stellige natürliche Zahl $m = 4k = \underbrace{4...4}_{s-\text{mal}}$.

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von m durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl n; es sind also s verschiedene Werte für n möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl c mit

$$c = n^2 - m^2 + k\,.$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen c in Abhängigkeit von der Stellenzahl s annehmen können.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631012

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$g_1:\ y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{9}\,,$$
$$g_2:\ y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{59}{6}\,,$$
$$g_3:\ 7 \cdot x - 6 \cdot y = 8\,,$$
$$g_4:\ 2 \cdot x - 9 \cdot y = -56\,.$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

631013

Von den Zahlen 2023, 2024 und 2025 ist die erste durch die Quadratzahl 289, die zweite durch die Quadratzahl 4 und die dritte durch die Quadratzahl 25 teilbar.

a) Geben Sie drei weitere Beispiele für jeweils drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

b) Zeigen Sie: Es gibt sogar unendlich viele Beispiele für drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

c) Finden Sie ein Beispiel mit vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

631014

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel vorkommt, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren.

Beispiel 1:

$$\sqrt{2x+1} = -7\,.$$

Es muss $x \geq -0{,}5$ sein, damit die Wurzel definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung führt zu $2x + 1 = 49$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = 24$. Setzt man diese Zahl in die Ausgangsgleichung ein, so stellt man fest, dass 24 keine Lösung ist.

Merke: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Es *kann* zu Scheinlösungen führen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Beispiel 2:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x-2}\,.$$

Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind.

Wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert und umformt, dann erhält man

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 2\,.$$

Erneutes Quadrieren führt zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 4 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 3 - \sqrt{13}$ und $x_2 = 3 + \sqrt{13}$. Wegen $3 - \sqrt{13} < 0 < 6$ ist $\sqrt{x_i - 6}$ jedoch nicht definiert; es handelt sich also um eine Scheinlösung. Auch für x_2 muss geprüft werden, ob es sich um eine Lösung handelt, denn wir haben nicht äquivalent umgeformt. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von

$$\sqrt{\sqrt{13}+3} + \sqrt{\sqrt{13}-3} = \sqrt{2\sqrt{13}+4}$$

zeigen lässt. Diese Gleichheit folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sqrt{13}+3} + \sqrt{\sqrt{13}-3}\right)^2 &= \sqrt{13}+3+2\sqrt{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)} + \sqrt{13}-3 \\ &= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13-9} = 2\sqrt{13}+4\end{aligned}$$

und der Aussage, dass für zwei Zahlen $A, B > 0$ und $A = B$ auch $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ gilt.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2x-14}\,.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}\,.$$

631015

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{CP}\right| + \left|\overline{DP}\right|$$

minimal wird.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631016

a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

   Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

   Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

631211

Für eine natürliche Zahl n sei $P(n)$ das Produkt ihrer von 0 verschiedenen Ziffern.

Beispielsweise ist also $P(2023) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Man ermittle, wie viele vierstellige Zahlen n mit der Eigenschaft $P(n) = 12$ existieren.

631212

Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

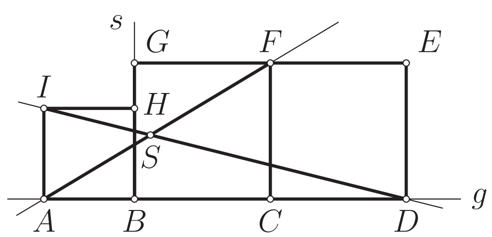
$$x + |y + 1| = 1\,, \qquad (1)$$
$$y + |z + 2| = 1\,, \qquad (2)$$
$$z + |x - 2| = 1 \qquad (3)$$

im Bereich der reellen Zahlen.

631213

Die neun Punkte A, B, C, D, E, F, G, H und I bilden drei Quadrate $ABHI$, $BCFG$ und $CDEF$, wobei die vier Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g und G, H auf einem gemeinsamen Strahl s mit dem Anfangspunkt B liegen (siehe Abbildung A 631213). Die Geraden AF und DI schneiden sich im Punkt S.

Man ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ASD$.



A 631213

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631214

Anna und Bea spielen ein Spiel mit Stapeln von schwarzen, roten und grünen Spielsteinen.

Zu Beginn des Spiels befinden sich k Stapel von je einem schwarzen Spielstein auf dem Spielfeld, wobei k eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Die Spielerinnen sind abwechselnd am Zug. Anna beginnt. Dabei gibt es zwei erlaubte Züge:

(1) Einen roten oder grünen Spielstein (aus einem ausreichend großen Vorrat) auf einen vorhandenen Stapel legen. Dabei dürfen nach dem Zug keine zwei Spielsteine gleicher Farbe im gleichen Stapel liegen. Ein Stapel kann also nur aus höchstens drei Spielsteinen bestehen.

(2) Zwei Stapel aus dem Spiel entfernen, wobei die obersten Spielsteine der beiden Stapel die gleiche Farbe haben müssen. Die Höhe kann unterschiedlich sein.

Es hat verloren, wer nicht mehr ziehen kann.

Man entscheide

a) für sechs Stapel ($k = 6$),

b) für eine beliebige gerade Anzahl $k \geq 2$ von Stapeln,

ob eine der beiden Spielerinnen so spielen kann, dass sie den Sieg erzwingen kann, und gebe gegebenenfalls eine solche Gewinnstrategie an.